

1 Cobb-Douglas Production Function

Definition 1.1 (Cobb-Douglas Production Function).

コブ=ダグラス型生産関数¹とは、以下の式で表される生産関数のことである。

$$Y = AK^\alpha L^\beta \quad (1.1)$$

ただし、 Y は生産量、 K は資本投入量、 L は労働投入量を表す。また、 α, β は正の定数とする。

1.1 Homogeneous Function of degree k

Definition 1.2 (Homogeneous Function of degree k).

正の整数 k について、次の関係が成立する関数を、**k 次の同次関数**という。

$$\lambda^k y = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad (1.2)$$

これは、生産要素 x_1, x_2, \dots, x_n を、それぞれ λ 倍したときの生産量が、もとの生産量の λ^k 倍になっていることを意味している。

コブ=ダグラス型関数について、以下の命題が成り立つ。

Proposition 1.3.

(1.1) において、 $\alpha + \beta = k$ の関係が成り立つとき (k は正の整数) , この生産関数は k 次同次関数である。

Proof.

(1.1) の各生産要素を λ 倍すると、

$$\begin{aligned} Y(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} \cdot AK^\alpha L^\beta \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} Y \end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha + \beta = k$ とおくと、 $Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda^k Y$ が成り立つ。したがって、定義 1.2 より (1.1) は k 次同次関数となる。 \square

コブ=ダグラス型関数は、一般に 1 次同次関数として使われることが多い。そのもとでは命題 1.1 より $\alpha + \beta = 1$ が成り立つことから、このとき (1.1) は、

$$\begin{aligned} Y &= AK^\alpha L^\beta \quad s.t. \alpha + \beta = 1 \\ &\text{または、} Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (1.3)$$

と書き換えられる。このような 1 次同次の生産関数をもつ企業の生産技術は「規模に対して収穫不変」とも表現される。

¹この関数は非常に便利な形をしているので、生産関数のみならず、効用関数やマッチング関数などにも用いられる。

1.2 Output Elasticity of an Input

1次同次関数であるコブ=ダグラス型生産関数の係数 α は、一体どのような意味をもつのだろうか。ところで k 次の同次関数については、次の有名な定理が成立している。

Theorem 1.4 (Euler's Theorem for Homogeneous Function).

k 次の同次関数については、次の関係が成立している。(下付き数字は、それによる微分を表す)

$$kf(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}x_1 + f_{x_2}x_2 + \dots + f_{x_n}x_n \quad (1.4)$$

この関係は、同次関数に関するオイラーの定理と呼ばれる。(一般的な証明は省略する)

Exercise 1.5 (Proof of simple case of Theorem 1.1).

定理 1.4 が、(1.3) 式について成立していること、つまり、

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L \quad (1.5)$$

が成り立つことを示しなさい。(ヒント: 1次同次の条件と、 λ が任意の数であることを利用する)

Definition 1.6 (Output Elasticity of an Input).

ある生産要素を1%変化させたときに生産量は何%変化するか、その値を表したものを、**産出の生産要素に対する弾力性**という。

特に、資本を1%変化させたとき、生産量は何%変化するかを表したものを**産出の資本弾力性**といい、具体的には、

$$\rho_K = \frac{dY/Y}{dK/K}$$

と定義される。

また同様に、労働を1%変化させたとき、生産量は何%変化するかを表したものを、**産出の労働弾力性**と呼び、数式では、

$$\rho_L = \frac{dY/Y}{dL/L}$$

で表される。

Proposition 1.7.

(1.3)における α, β は、それぞれ産出の資本弾力性、産出の労働弾力性を表している。(つまり、1次同次関数のコブ=ダグラス型生産関数におけるこれらの弾力性の和は1に等しい)

Proof.

(1.3)について、

$$\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K = \alpha AK^\alpha L^\beta = \alpha Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L = \beta AK^\alpha L^\beta = \beta Y$$

を得る。これらを変形すると、

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

が成り立つ。さらにこれらを変形することで、

$$\alpha = \frac{dY/Y}{dK/K} = \rho_K, \quad \beta = \frac{dY/Y}{dL/L} = \rho_L$$

を得る。 □

1.3 Capital and labor shares

我々はしばしば、生産によって得た価値がどれだけ資本と労働に振り分けられたのか、その相対的な値に興味を抱く。そのような概念として、資本分配率および労働分配率というものがある。

Definition 1.8 (Capital and labor shares).

生産による付加価値のうち、どれだけが資本への支払いとして分配されたか、その値を資本分配率という（労働分配率についても同様）。具体的には、資本分配率、労働分配率は、それぞれ以下の式で表される。

$$s_K = \frac{rK}{Y}, \quad s_L = \frac{wL}{Y}$$

ただし、 r は資本のレンタル価格、 w は労働賃金である。

Proposition 1.9.

生産要素市場が完全競争的であると仮定する。このとき、(1.3) における α 、 β は、それぞれ資本分配率、労働分配率を表す。すなわち、1次同次関数のコブ=ダグラス型生産関数において、生産された付加価値は全て資本と労働に分配し尽くされる。

Proof.

命題 1.7 において、(1.3) について

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

が成り立つことを確認した。

要素市場が競争的であるという仮定から、 $\frac{\partial Y}{\partial K} = r$ 、 $\frac{\partial Y}{\partial L} = w$ である。これらを上記に代入することで、 $\alpha = \frac{rK}{Y}$ 、 $\beta = \frac{wL}{Y}$ を得る。 □

1.4 Marginal Rate of Technical Substitution

Definition 1.10 (Marginal Rate of Technical Substitution).

「労働（資本）を追加的に1単位増やしたとき、もとの生産量を維持するには、どれだけ資本（労働）を減らす必要があるか」を表す割合のことを、**技術的限界代替率**という。

具体的には、等量曲線の接線の傾きの絶対値であり、数学的には以下の式で表現される。

$$MRTS = -\frac{dK}{dL} \Big|_{F(K,L)=\bar{x}} \quad (1.6)$$

Proposition 1.11.

コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) における技術的限界代替率は、

$$MRTS = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{K}{L}$$

で表される。特に、生産関数が1次同次のときは、 $\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \frac{K}{L}$ である。

Proof.

ある生産関数 $Y = F(K, L)$ を全微分することで、 $dY = \frac{\partial Y}{\partial K} dK + \frac{\partial Y}{\partial L} dL$ を得る。いま、生産量が変わらない状況を考えているので $dY = 0$ 、つまり、 $\frac{\partial Y}{\partial K} dK + \frac{\partial Y}{\partial L} dL = 0$ となる。これを变形することで、以下を得る。

$$\begin{aligned} MRTS &= -\frac{dK}{dL} \\ &= \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} \end{aligned} \quad (1.7)$$

よって生産関数から技術的限界代替率を求めることが可能となった。(1.1) より、

$$\begin{aligned} MRTS &= \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} \\ &= \frac{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{K}{L} \end{aligned}$$

を得る。

□

1.5 Elasticity of substitution between labour and capital

コブ=ダグラス型関数の特徴の1つとして、要素間の代替弾力性が1となるということが挙げられる。代替弾力性は、次のように定義される。

Definition 1.12 (Elasticity of substitution).

生産要素の相対価格 $\frac{w}{r}$ が1%変化したとき、要素投入量の比率 $\frac{K}{L}$ が何%変化するか、という指標を資本と労働の代替弾力性という。具体的には、以下の式で表される。

$$\sigma = \frac{d(K/L)/K/L}{d(w/r)/w/r} \quad (1.8)$$

Proposition 1.13.

コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) の要素間の代替弾力性は1である。

Proof.

$y = \log f(x)$ の微分について、 $dy' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ が成り立つことを利用すると、 $d \log \frac{K}{L} = \frac{d(K/L)}{K/L}$ 、および、 $d \log \frac{w}{r} = \frac{d(w/r)}{w/r}$ を得る。
これを (1.8) に代入すると、

$$\sigma = \frac{d \log \frac{K}{L}}{d \log \frac{w}{r}} \quad (1.9)$$

ここで、企業が費用最小化行動をとるとすると、 $MRTS = \frac{w}{r}$ が成り立つ。これを (1.9) に代入することで、次式を得る。

$$\sigma = \frac{d \log \frac{K}{L}}{d \log MRTS} \quad (1.10)$$

コブ=ダグラス型生産関数 (1.1) の技術的限界代替率は、 $MRTS = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{K}{L}$ で表される。これの対数をとって、

$$\begin{aligned} \log MRTS &= -\log \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{K}{L} \\ &= -\log \frac{\beta}{\alpha} + \log \frac{K}{L} \end{aligned}$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ は定数だから、 $d \log(MRTS) = d \log \frac{K}{L}$ となる。これを (1.10) に代入することで、 $\sigma = 1$ を得る。

□

2 CES Production Function

CES(*Constant elasticity of substitution*) 型生産関数とは,

$$Y(K, L) = A(a_1K^\alpha + a_2L^\alpha)^\beta \quad (2.1)$$

上式のような形で表される生産関数のことである。

a_i は $0 < a_i < 1$, $\sum_{i=1} a_i = 1$ を満たすと仮定する。また α, β については, 議論を簡単にするために, 規模に関して収穫一定, すなわち 1 次同次関数となるための仮定 $\alpha\beta = 1$ がしばしば置かれる。

したがって, (2.1) は,

$$Y(K, L) = A[aK^\rho + (1-a)L^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \quad (2.2)$$

上式の形で用いられることが多い。

Exercise 2.1.

(2.1) 式について, 1 次同次が成立するための条件が $\alpha\beta = 1$ であることを確認しなさい。

Exercise 2.2.

CES 型生産関数 (2.2) の技術的限界代替率が, 次式になることを確かめなさい。

$$MRTS = \left(\frac{1-a}{a}\right) \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho} \quad (2.3)$$

2.1 Elasticity of Substitution

代替弾力性 σ とは, 前章でも述べたように, 生産要素の相対価格 w/r が変化したとき, 生産要素投入量の組み合わせ K/L (資本集約度) がどれほど変化するか, という指標であった。具体的には,

$$\sigma = -\frac{d(K/L)/(K/L)}{d(w/r)/(w/r)} \quad (2.4)$$

上式で表されるが, 前章で確認したとおり, 費用最小化行動のもとでは,

$$\sigma = -\frac{d \log(K/L)}{d \log(MRTS)} \quad (2.5)$$

としても表される。ここで, 技術的限界代替率が (2.3) で与えられることから,

$$\log MRTS = \log\left(\frac{1-a}{a}\right) + (1-\rho) \log\left(\frac{K}{L}\right)$$

より,

$$d \log MRTS = (1-\rho) d \log\left(\frac{K}{L}\right)$$

となることから, 結局代替弾力性は,

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \quad (2.6)$$

となる。 ρ は定数であるから、 σ も定数となる。生産量に関わらず代替弾力性が一定の値を取ることが、CES(*Constant elasticity of substitution*)と呼ばれる所以である。

2.2 Special Cases

2.2.1 The Case of Perfect Substitution ($\rho = 1$)

$\rho = 1$ のとき、(2.2) は、

$$Y(K, L) = A[aK + (1 - a)L]$$

となり、線形生産関数となる。このとき代替弾力性 (*Elasticity of Substitution*) は、(2.6) より $\sigma \rightarrow \infty$ 。つまり要素同士が完全代替となる。

2.2.2 The Case of Imperfect Substitution ($\rho \rightarrow \infty$)

(2.2) において ρ を ∞ に近づけていくと、CES 型生産関数はレオンチェフ型生産関数 $Y(K, L) = \min(AK, AL)$ に近づく。このとき生産要素間の代替は起きず、代替弾力性は 0 となる。

Exercise 2.3.

$\rho \rightarrow \infty$ のとき (2.2) 式がレオンチェフ型生産関数に近づくことを確認しなさい。

2.2.3 The Case of Unit Elasticity of Substitution ($\rho \rightarrow 0$)

(2.2) において ρ を 0 に近づけていったとき、CES 型生産関数はコブ=ダグラス型生産関数に近づく。前節で見たとおり、このとき代替弾力性は 1 になる。

Exercise 2.4.

$\rho \rightarrow 0$ のとき (2.2) 式がコブ=ダグラス型生産関数に近づくことを確認しなさい。

(ヒント：対数をとったのち、次に述べるロピタルの定理を用いる。)

2.3 Mathematical Appendix

ロピタルの定理 (*L'Hôpital's Rule*) とは、関数 $f(x)$, $g(x)$ について、

- $x = a$ を含む区間上で連続であり、
- 少なくとも $x = a$ を除く点で微分可能であり ($x = a$ で微分可能であっても良い) 、
- さらに、 $x \rightarrow a$ のとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

が成り立つならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

という関係が成立するという定理である。この定理は、不定形の極限を計算するときに大きな威力を発揮する。なお、 a を無限大に置き換えても定理は成り立つ。

3 CIES Utility Function

CIES 型効用関数とは,

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\rho} - 1}{1-\rho} \quad (3.1)$$

の形で表される関数である。ただし, c_t は t 期の消費であり, $\rho > 0$ である。
ここで (3.1) の 1 階微分と 2 階微分を求めると, $c_t > 0$ において,

$$u'(c_t) = c_t^{-\rho} > 0, \quad (3.2)$$

$$u''(c_t) = -\rho c_t^{-\rho-1} < 0. \quad (3.3)$$

となる。つまりこの関数は凹関数であることが確認された。以下からはこの微分の結果を用いて, CIES 型関数の重要な性質を示していく。

Proposition 3.1. Constant Intertemporal Elasticity of Substitution.

CIES 型効用関数は, 異時点間の消費の代替弾力性が一定という特徴を持つ。(3.1) における異時点間代替弾力性は $\sigma = 1/\rho$ で表される。

Proof. 省略 □

Proposition 3.2.

(3.1) において, ρ を 1 に近づけていくと, CIES 型効用関数は対数効用関数になる。

Proof. 省略 □